COMPUTEREINSATZ IM STOCHASTIKUNTERRICHT

Wolfgang Stormer, BRG Perchtoldsdorf

Die folgenden Ausführungen und Programmhinweise beziehen sich auf das Programm STOCHASTIK, für das eine Generallizenz des BMUK für alle Allgemeinbildenden Höheren Schulen existiert.

Einleitung

Die Stochastik (Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung) findet im täglichen Leben so oft Anwendung, daβ ihre Bedeutung wohl auβer Zweifel steht. Die Lehrpläne aller Schultypen (inklusive Hauptschule) und Klassenstufen nehmen darauf Rücksicht.

In der Schulmathematik ist gerade die Wahrscheinlichkeitsrechnung ein äuβerst dankbares Stoffgebiet. Interessante Problemstellungen wecken die Neugier, fast alle Schüler lassen sich motivieren, kreative und heuristische Denkweisen können gefördert werden, man kann experimentelle Mathematik betreiben und findet genug praxisgerechte Aufgaben.

Jedes Zufallsexperiment kann mit Zufallszahlen simuliert werden. Solche Verfahren nennt man Monte-Carlo-Methoden (das Roulette erzeugt Zufallszahlen von 0 bis 36) und da ein Computer über einen Zufallszahlengenerator verfügt, ist er für Simulationen hervorragend geeignet.

Die Vorteile des Computereinsatzes sind u.a.:
Langweilige Tätigkeiten (z.B. Eingabe von statistischen Daten, 1000-mal würfeln) werden vermieden.

Ein Problem kann auf einfache Weise mit geänderten Parametern mehrmals simuliert bzw. berechnet werden.
Mathematische Aussagen werden kontrolliert (es gibt viele Beispiele, bei denen die berechneten Ergebnisse nicht glaubwürdig erscheinen).
Das Verständnis für den Begriff Wahrscheinlichkeit wird geschult und verbessert.
Die grafische Auflösung der Beispiele gefällt.
Der Spieltrieb wird geweckt.
Der Einsatz des Computers im Unterricht motiviert die Schüler.

Das Programm Stochastik versucht diese Vorteile zu nutzen und ist so gestaltet (menügesteuert, selbsterklärend, absturzsicher), daß Schüler damit interaktiv arbeiten können; selbstverständlich ist auch eine Demonstration durch den Lehrer möglich.

Die mathematischen Grundlagen der jeweiligen Problemstellungen sollten den Schülern bekannt sein. Ein ausgewähltes Beispiel kann vorher bereits im Unterricht besprochen und anschließend mit Hilfe der Simulation verifiziert werden (z.B. Geburtstagsprobleme, Galton-Brett) oder das Problem wird zuerst simuliert und die Schüler werden beauftragt, den Lösungsweg für die exakte Berechnung zu finden (z.B. Würfel von Bradley Efron, Münzenspiel).

Programmbedienung

Bei der Programmerstellung wurde auf eine einfache, selbsterklärende Bedienung sehr großer Wert gelegt, um Handling-Probleme möglichst gering zu halten und in einer Unterrichtseinheit wirklich effizient arbeiten zu können.

Allgemeine Hinweise:

Jede in den verschiedenen Menüs angezeigte Option ist immer auf 3 Arten anwählbar:

1) Mit Hilfe der Cursortasten (Pfeiltasten) + <RETURN>.

2) Anklicken mit der linken Maustaste.

3) Drücken des farbig hervorgehobenen Buchstaben der gewünschten Option bzw. der farbig hervorgehobenen Taste.

Nach Ablauf eines Beispiels haben Sie immer folgende Wahlmöglichkeiten:

Taste	Wirkung
F2	Rückkehr zum Hauptmenü
F3	Aufruf der aktuellen Seite
F4	Nochmaliger Aufruf des aktuellen Beispiels

Auch diese Eingaben können über die Tastatur oder durch Anklicken mit der linken Maustaste erfolgen.

Beschreibende Statistik:

Das Eingeben, Korrigieren , Anfügen, Löschen und Formatieren von Daten kann mit der Taste <ESC> abgebrochen werden; ein Defaultwert wird mit der Taste <RETURN> übernommen.

Wahrscheinlichkeitsrechnung:

Bei allen Beispielen werden Intervalle für die möglichen Eingaben, die im Normalfall mit der Taste <RETURN> abzuschließen sind, im Text angegeben. Für die Eingaben von Wahrscheinlichkeiten in Prozent gilt: $0{,}01 \leq p \leq 99{,}99$.
<ESC> ermöglicht fast immer den Abbruch eines Beispiels, wenn vom Benutzer eine Eingabe erwartet wird; es erfolgt die Rückkehr zur jeweiligen Seite.
Um die Ergebnisse durch die Rechnung verifizieren zu können, erfolgt die Ausgabe von Wahrscheinlichkeiten in Prozent auf zwei Dezimalen gerundet; dabei bedeutet "fast 0 Prozent" weniger als 0,01 Prozent, "fast 100 Prozent" mehr als 99,99 Prozent.
Zeitkritische Simulationen können durch einen Tastendruck bzw. durch Drücken einer Maustaste unterbrochen werden. Ein Druck auf <F10> bzw. auf die rechte Maustaste bricht die Simulation ab, andere Tasten führen sie fort.

Meldung	Tastatur	Maus
<Taste>	beliebige Taste	beliebige Maustaste
<F10>	Funktionstaste F10	rechte Maustaste

Bei allen Simulationen, die Grafik verwenden, wird diese - abhängig von den Ergebnissen der Zufallsexperimente - dem vorhandenen Platz am Bildschirm angepaßt (d.h. entsprechend verkleinert bzw. vergrößert).
Weitere Informationen finden Sie im Begleitheft.
Der im folgenden beschriebene Modul **Beschreibende Statistik** wurde für den Einsatz in der Unterstufe konzipiert und ist dort problemlos verwendbar.

Beschreibende Statistik

Nach Eingabe einer Urliste von mindestens 5 und maximal 60 Daten (oder Laden der Daten von Diskette) werden folgende Kennzahlen bzw. Streuungsmaße der Liste berechnet: Minimum, Maximum, Spannweite, Mittelwert, Modalwert(e), Zentralwert (Median), Quartilen, die mittlere absolute Abweichung (Streuung um den Zentralwert) und die Standardabweichung.
Mehrere grafische Darstellungsmöglichkeiten.

In der beschreibenden Statistik steht die Aufbereitung von Daten, die im allgemeinen zuerst geordnet und dann in Tabellen und Grafiken dargestellt werden, im Vordergrund. Zur übersichtlichen Beschreibung werden Kennzahlen (Parameter) wie Mittelwerte, Streuungsmaße etc. verwendet. Dabei ist es wichtig, in welcher Form das Datenmaterial dargestellt wird, welche Kennzahlen (sinnvollerweise) angegeben werden und wie sie zu interpretieren sind. Mit statistischen Darstellungen kann man verschiedene subjektive Eindrücke erzielen (Möglichkeiten der Manipulation!), die eventuell zu falschen bzw. vorschnellen Schlüssen führen. (Zitat von Winston Churchill: "Trau keiner Statistik, die Du nicht selbst gefälscht hast").
Die Auswertung statistischer Daten und deren Beurteilung erfordert also nicht nur rechnerische Fähigkeiten (wie sie ein Computer zweifelsohne besitzt), sondern die richtige Wahl der Parameter ist entscheidend für deren Wert und Aussagekraft. Eines der Ziele des Programms ist es, daß der Schüler erfährt, welche statistischen Beschreibungsformen je nach Sachsituation und Untersuchungszweck vorteilhaft und sinnvoll sein können.
Didaktisch gesehen tragen Kenntnisse der Grundlagen und Probleme der beschreibenden Statistik Wesentliches zum Verständnis der Wahrscheinlichkeitstheorie bei.

<u>Programmhinweise:</u> Jedes Listenelement besteht aus einem Zahlenwert und einem dazugehörigen Text. Daten können korrigiert, angefügt, gelöscht, aufsteigend sortiert, geladen und gespeichert werden.
Laden einer Datei: Die Wahl erfolgt entweder mit Hilfe der Cursortasten oder durch Anklicken mit der Maus aus einem sortierten Inhaltsverzeichnis (max. 105 Dateien).

Nach der Eingabe (oder Laden) der Daten befindet man sich im Hauptmenü. Dieses hat, je nach dem, ob die Liste sortiert ist oder nicht, folgendes Aussehen:

Hauptmenü bei einer unsortierten Liste				
Optionen	Sortieren der Daten	Kennzahlen	Grafik	ESC-Ende

Hauptmenü bei einer sortierten Liste				
Optionen	Kennzahlen	Einteilung in Klassen	Grafik	ESC-Ende

Der Wechsel zwischen den einzelnen Menüs ist sehr einfach.
<u>Hauptmenü:</u>
<*Optionen*>: Führt ins <u>Menü Daten:</u>

<korrigieren>: Datensatz ändern.

<anfügen> / <löschen>: Datensätze anfügen / löschen.

<formatieren>: Festlegung der Anzahl der Dezimalstellen für die Ausgabe der Listenelemente.

<speichern>: Alle auf Datenträger vorhandenen Dateien haben die Extension STA. Da die Anzahl der Nachkommastellen auch abgespeichert wird, sollte diese vorher mit "formatieren" festgelegt werden. Wird eine Datei geladen oder gespeichert, so wird ihr Name bei dargestellter Liste rechts oben angezeigt.

<in Ordnung>: Rückkehr zum Hauptmenü.

<Sortieren der Daten>: Die Datensätze werden der Größe nach aufsteigend sortiert. Dies ist aus didaktischen Gründen für eine Klasseneinteilung und ein Kastenschaubild unbedingt notwendig. Gibt man eine bereits sortierte Liste ein, so wird dies vom Programm erkannt.

<Kennzahlen>: Ausgabe von Minimum, Maximum, Spannweite, Mittelwert, Standardabweichung, Modalwert(e). Zusätzlich bei einer sortierten Liste: Zentralwert, die Quartilen und die mittlere absolute Abweichung.

Mittelwert, Standardabweichung, Quartilen, mittlere absolute Abweichung werden (wenn möglich) mit 2 Dezimalen mehr ausgegeben.

<Einteilung in Klassen>: Möglichkeit, die Liste in maximal 10 Klassen einzuteilen. Der Defaultwert ergibt sich aus der in der Statistik gebräuchlichen Faustregel, wonach die Klassenanzahl bei n Daten $\sqrt{n}$ nicht überschreiten soll. Jede Klasse kann mit einem selbstgewählten Text für die Grafik beschriftet werden.

Die eingegebenen Grenzen für die einzelnen Klassengrenzen a und b ($a \leq x < b$) werden vom Computer nicht geprüft, der Schüler hat selbst für eine sinnvolle Klasseneinteilung zu sorgen. Als Defaultwert für die untere Schranke der 1.Klasse wird das Minimum der Liste vorgegeben, was in den meisten Fällen sinnvoll ist. Da der Computer jedoch an Hand der Zahlenwerte deren Bedeutung und die Art der Liste nicht erkennen kann, muß wieder der Schüler, wie so oft in der Statistik, selbsttätig sinnvolle Entscheidungen treffen.

Dazu ein Beispiel:

Möchte man eine mit einem Punktesystem (hier 24 Punkte) beurteilte Schularbeit in Klassen einteilen, so muß die kleinste Klassenschranke jene Punkteanzahl sein, mit der man gerade noch ein "Sehr gut" erhält.

Anzahl der gewünschten Klassen: 5

1.Klasse:	a = 23	b = 25	Text für Grafik: Sehr gut
2.Klasse:	a = 20	b = 23	Text für Grafik: Gut
3.Klasse:	a = 16	b = 20	Text für Grafik: Befriedigend
4.Klasse:	a = 12	b = 16	Text für Grafik: Genügend
5.Klasse:	a = 0	b = 12	Text für Grafik: Nicht genügend

Die 5 Klassen mit ihren absoluten und relativen Häufigkeiten (in%) werden ausgegeben.

Wählt man nun <Histogramm der Klassen>, so erhält man die Grafik in der gewünschten Form (von "Sehr gut" bis "Nicht genügend").

<Grafik>: Führt zu den Grafikoptionen und Grafiktypen:

Bei allen Grafiktypen werden Mittelwert m und Zentralwert z gezeichnet und negative Werte unterhalb der x-Achse dargestellt (z.B. Temperaturen). Die Skalierung der y-Achse erfolgt immer in einer, von den jeweiligen Daten abhängigen, dekadischen Einheit. Weiters gibt es die Möglichkeit, die Grafik in x- bzw. y-Richtung zu verkleinern, um besondere Absichten hervorzuheben und dadurch Manipulationsmöglichkeiten aufzuzeigen.

<Punkte>: Darstellung der Liste durch Punkte.

<Streckenzug (Polygonbild)>: Liniengrafik.

<Liste (Histogramm)>: Histogramm der (un)sortierten Liste.

<Histogramm der Klassen>: 3D-Histogramm einer sortierten und in Klassen eingeteilten Liste.

<Kastenschaubild>: Kastenschaubild der sortierten Liste. Die einzelnen Listenelemente sind, entsprechend ihrer Häufigkeit, durch verschieden lange, senkrechte Strecken dargestellt.

Die im folgenden aus dem Programmpaket ausgewählten Aufgaben und Beispiele kann man meiner Meinung nach in jeder AHS (auch in nieder dodierten Klassen) behandeln.

Die näherungsweise Bestimmung der Zahl π

In einem Quadrat werden zwei Eckpunkte durch einen Viertelkreis verbunden. Innerhalb des Quadrats werden n Punkte erzeugt. Der Anteil der Punkte innerhalb des Viertelkreises ergibt eine Näherung für π.

Man betrachtet ein Quadrat mit s = 1E und innerhalb des Einheitsquadrats eine zu bestimmende Fläche A. Ein zufällig generierter Punkt $P(x_i/y_i)$ (mit $0 \leq x_i \leq 1$ und $0 \leq y_i \leq 1$) liegt nun innerhalb der Fläche A oder nicht. Gehören von n Punkten g Punkte zu A, so gilt

$$\frac{\textit{Inhalt der Fläche A}}{\textit{Inhalt des Einheitsquadrats}} = \frac{g}{n} = I$$

Wählt man als Fläche A einen Viertelkreis (r = 1E), so erhält man

$$I = \frac{\pi}{4} = \frac{g}{n} \rightarrow \pi = \frac{4g}{n}$$

<u>Programmhinweis:</u> Grafische Simulation, wobei der jeweils aktuelle Näherungswert von π angezeigt wird.

Würfeln

Ein (zwei, drei) Würfel wird (werden) n-mal geworfen. Die absoluten und die relativen Häufigkeiten der Augenzahlen (Augensummen) und ihr Mittelwert werden berechnet.

Diese Beispiele dienen der Einführung der statistischen Wahrscheinlichkeit. Vergrößert man den Umfang einer Stichprobe, so nähert sich die relative Häufigkeit für das Eintreffen eines bestimmten Merkmals immer mehr einer bestimmten Zahl (intuitive Wahrscheinlichkeit).
Programmhinweis: Simulation. Ausgabe der absoluten und relativen Häufigkeiten der Augensummen (Augenzahlen), sowie ihrer "Sollwerte" samt Abweichungen. Im 3D-Histogramm sind die "Sollwerte" gekennzeichnet.

Geburtstagsprobleme

Bei den Geburtstagsproblemen wird 1 Jahr mit 365 Tagen angenommen.

1.Geburtstagsproblem

In einem Saal befinden sich n Personen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß mindestens zwei dieser Personen denselben Geburtstag haben ?

E' ... keine 2 Personen haben am selben Tag Geburtstag

$$P(E') = \frac{365}{365}\,\frac{364}{365}\,\frac{363}{365}\,\cdots\cdots\,\frac{(365-n+1)}{365} = \frac{365\,.\,364\,\ldots\,(365-n+1)}{365^n}$$

und P(E) = 1 - P(E')

Für n = 23 ist P(E) = 0,5073, also größer als 50%. Dies ist etwas überraschend, denn erstmalige Schätzungen bewegen sich meist in der Größenordnung von n = 183 (≈ 365:2). Sind 23 Personen anwesend, so kann man aus diesen 23 über 2 (=253) Paare bilden, d.h. es gibt 253 Gelegenheiten für gleiche Geburtstage. Der Grund, warum die Intuition hier versagt, ist eine Verwechslung mit dem 2.Geburtstagsproblem.

Die folgende Tabelle zeigt weitere Werte:

n	P(E)	n	P(E)	n	P(E)	n	P(E)
10	0,1169	25	0,5687	45	0,9410	65	0,9977
15	0,2529	30	0,7063	50	0,9704	70	0,9992
20	0,4114	35	0,8144	55	0,9863	75	0,9997
23	0,5073	40	0,8912	60	0,9942	80	0,9999

Programmhinweis: Die Simulation erfolgt mit Hilfe eines Kalenders. Ein Tag, an dem nur eine Person Geburtstag hat, wird gelb, einer an dem mindestens 2 Personen Geburtstag haben, rot markiert.

2.Geburtstagsproblem

Auf einem großen Platz befinden sich außer Ihnen noch n Personen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß mindestens eine dieser Personen denselben Geburtstag hat wie Sie?

Eine zufällig ausgewählte Person hat nicht Ihren Geburtstag mit der Wahrscheinlichkeit 364/365.

Keine der n Personen hat Ihren Geburtstag mit der Wahrscheinlichkeit $P(E') = (364/365)^n$.

Mindestens eine Person hat ihren Geburtstag mit der Wahrscheinlichkeit $P(E) = 1 - P(E')$.

$$\text{Aus } 1 - \left(\frac{364}{365}\right)^n \geq \frac{1}{2} \quad \text{folgt} \quad n \geq \frac{\ln 2}{\ln 365 - \ln 364} \approx 252{,}65$$

Für n = 253 ist P(E) = 0,5005, also größer als 50%.

Sind außer Ihnen 253 Personen anwesend, dann gibt es auch 253 Möglichkeiten dafür, daß eine Person am selben Tag wie Sie Geburtstag hat.

Die folgende Tabelle zeigt weitere Werte:

n	P(E)	n	P(E)	n	P(E)
50	0,1282	250	0,4963	1000	0,9357
100	0,2399	300	0,5609	1500	0,9837
150	0,3374	400	0,6663	2000	0,9959
200	0,4223	500	0,7463	3000	0,9997

Programmhinweis: Die Simulation erfolgt ähnlich wie beim 1.Geburtstagsproblem. Sie geben Ihren Geburtstag ein, er wird grün markiert. Gibt es eine Person, die denselben Geburtstag hat wie Sie, so ist das Markierungszeichen rot.

Die Würfel von Bradley Efron

Ein Spiel mit vier Würfel, deren Seiten wie folgt aussehen:

Würfel [A]

	0	
4	0	4
	4	
	4	

Würfel [B]

	3	
3	3	3
	3	
	3	

Würfel [C]

	2	
2	2	2
	6	
	6	

Würfel [D]

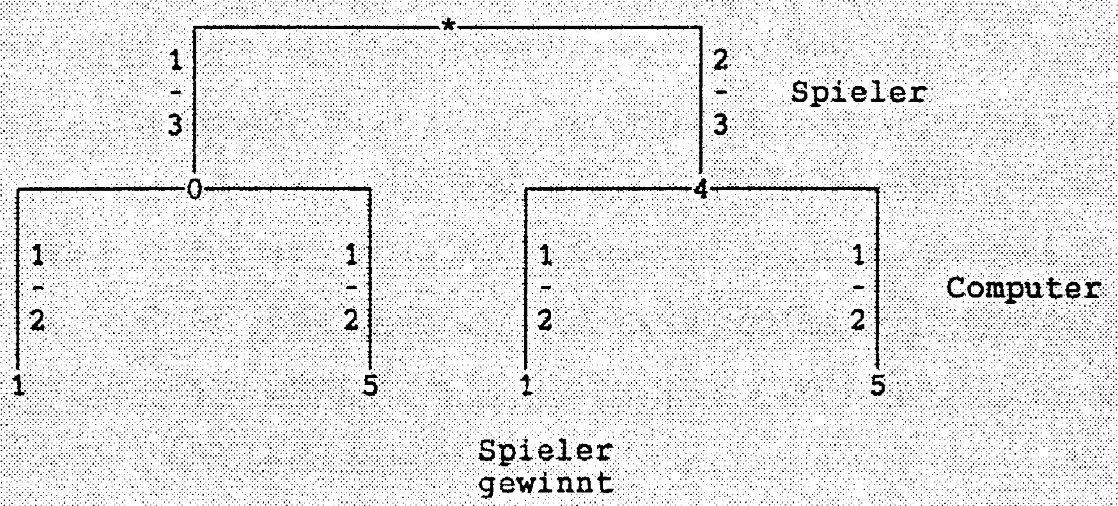
	5	
1	1	1
	5	
	5	

Sie dürfen sich zuerst einen Würfel auswählen, anschließend wählt der Computer einen der drei übrigen. Wer die höhere Augenzahl wirft ist Sieger. Das Spiel wird n-mal durchgeführt.

Das Verblüffende an diesem Spiel ist, daß der Computer zu jeder Wahl des Spielers einen Würfel wählen kann, der ihm Gewinnchancen von 2/3 garantiert.

Das graphische Lösen von Aufgaben der Wahrscheinlichkeitsrechnung (Baumdiagramme) kommt dem Verständnis sehr entgegen.
Die Wahrscheinlichkeit eines Pfades ist das Produkt der Einzelwahrscheinlichkeiten entlang dieses Pfades. Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller Pfade, die dieses Ereignis darstellen.

Beispiel: Der Spieler wählt A, der Computer wählt D.



Baumdiagramm, Würfel von Bradley Efron

Der Spieler siegt mit der Wahrscheinlichkeit $P(S) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$, der Computer mit der Wahrscheinlichkeit $P(C) = 1 - P(S) = \frac{2}{3}$.

Tabelle der optimalen Strategie				
Wahl des Spielers	A	B	C	D
Wahl des Computers	D	A	B	C

Aus D schlägt A und A schlägt B folgt nicht D schlägt B (nicht transitiv)!

Programmhinweise: Simulation. Der Spielverlauf wird aufgezeichnet und - wenn möglich - grafisch dargestellt. Die gezeichnete Gerade (W) entspricht der Wahrscheinlichkeit von 2/3, mit der der Computer (C) ein Spiel gegen den Spieler (S) gewinnt; gewinnt der Computer genau 2/3 aller Spiele, so kommt der Endpunkt der Grafik genau auf dieser Geraden zu liegen.

Da die Wahrscheinlichkeitstheorie ihr Entstehen dem Glücksspiel verdankt und die Gewinnchancen im täglichen Leben meist zu positiv bewertet werden, sollten einige dieser Spiele unbedingt im Unterricht behandelt und simuliert werden.

Glücksspiele (Roulette, Toto, Lotto)

Roulette (Setzen auf eine bestimmte Zahl)

Wie oft muß man beim Roulette mindestens auf eine bestimmte Zahl (0-36) setzen, damit die Wahrscheinlichkeit zu gewinnen wenigstens p Prozent beträgt?

E' ... kein Gewinn bei n Spielen, $P(E') = \left(\frac{36}{37}\right)^n$

Wir setzen Wahrscheinlichkeit w = p/100

$$\text{Aus } 1 - \left(\frac{36}{37}\right)^n \geq w \quad \text{folgt} \quad n \geq \frac{\ln(1-w)}{\ln\frac{36}{37}}$$

Tabelle einiger interessanter Werte					
P(E)≥	0,50	0,75	0,90	0,95	0,99
n≥	26	51	85	110	169

Programmhinweise: Die für die eingegebene Wahrscheinlichkeit notwendige Anzahl n von Spielen wird zuerst berechnet. Sie können auf eine Zahl setzen, dann werden n Spiele simuliert.

Roulette (Setzen auf einfache Chancen)

Das Setzen auf einfache Chancen beim Roulette, simuliert am Beispiel Rot - Schwarz. Das Spiel wird n-mal durchgeführt und alle Serienlängen gleicher Farbe angegeben. Die Simulation soll u.a. zeigen, wie gefährlich es für einen Spieler im Casino ist, nach dem Martingale - System zu setzen. Dieses System, bei dem die Einsätze so lange verdoppelt werden, bis man gewinnt, könnte in gewissem Sinn Erfolg haben, wenn die Bank nicht ein Limit setzte. Setzt der Spieler z.B. auf Rot, so gewinnt er nach diesem System solange seinen Einsatz, bis einmal eine Serie von 12 Nicht-Roten Zahlen auftritt.

Jeder Spieler, der sich von diesem System Erfolg verspricht, leitet intuitiv aus P(R)=P(S) ab, daβ Rot und Schwarz sich in ihrem Auftreten meist regelmäβig abwechseln, längere Serien gleicher Farben praktisch nicht auftreten und hofft auβerdem, daβ die "0" (Null) nicht kommt. Weiters wird angenommen, daβ die kleine Elfenbeinkugel sich daran erinnert, daβ sie einige Male auf Schwarz gefallen war und das nächste Mal Schwarz meiden wird.

Bemerkung: In Österreichs Casinos beträgt bei einem Minimumeinsatz von 100 S das Maximum auf einfache Chancen 120 000 S. Setzt man z.B. 100 S auf Rot und es kommt die Zahl 0, so spielt man die nächste Runde mit dem halben Einsatz (50 S) auf Rot. Fällt die Kugel dann auf Rot, so bekommt man seinen ursprünglichen Einsatz (100 S) zurück, anderenfalls hat man verloren.

Für das Roulette gilt: $P(R) = P(S) = \frac{18}{37}$

Die Wahrscheinlichkeit, daß sich bei 12 Spielen R und S immer abwechseln, beträgt:

$P(RSRSRSRSRSRS) = \left(\frac{18}{37}\right)^{12} \approx 0{,}0001757 \qquad 0{,}0176\%$

Die Wahrscheinlichkeit, daß 12-mal S kommt, beträgt:

$P(SSSSSSSSSSSS) = \left(\frac{18}{37}\right)^{12} \approx 0{,}0001757 \qquad 0{,}0176\%$

Lassen Sie die Schüler vor der Berechnung schätzen, kaum einer wird diese beiden Ereignisse für gleichwahrscheinlich halten.

Bei dieser Gelegenheit sollte man darauf hinweisen, daß beim Roulette auf lange Sicht immer die Bank gewinnt; das einzige Casinospiel, bei dem die Chancen für den Spieler zu gewissen Zeiten günstig stehen, ist Black Jack.

Programmhinweis: Die Serienlängen gleicher Farbe (grün ist Null) werden bei der Simulation als entsprechend lange Balken dargestellt.

Toto

Toto: Sie geben Ihren persönlichen Tip ab - es werden n Runden gespielt.

Insgesamt gibt es 3^{12} = 531 441 mögliche Tipkolonnen. Darunter befinden sich 1 Zwölfer, 24 Elfer und 264 Zehner.

Einen Elfer hat man, wenn genau einer der 12 Tips falsch ist. Jedes der 12 Spiele kann man auf 2 Arten falsch tippen.

Daher gibt es $2 \cdot \binom{12}{11} = 2 \cdot 12 = 24$ *Elfer.*

Einen Zehner hat man, wenn genau zwei der 12 Tips falsch sind; zwei der 12 Spiele kann man auf 2^2 Arten falsch tippen.

Daher gibt es $2^2 \cdot \binom{12}{10} = 4 \cdot 66 = 264$ *Zehner.*

Wir erhalten somit folgende Wahrscheinlichkeiten:

$P(12) = \frac{1}{3^{12}} \approx 0{,}000002$ 0,0002%

$P(11) = \frac{24}{3^{12}} \approx 0{,}000045$ 0,0045%

$P(10) = \frac{264}{3^{12}} \approx 0{,}0005$ 0,05%

Programmhinweise: Die Simulation nimmt darauf Rücksicht, daβ in der Praxis die drei möglichen Tips (1, 2, X) nicht gleichwahrscheinlich sind. Die absoluten und relativen Häufigkeiten der Anzahl richtiger Tips werden ausgegeben.

Lotto

Lotto (6 aus 45): Sie setzen Ihre Glückszahlen - es werden n Runden gespielt.

E_i ... Ereignis, daß i Zahlen richtig sind.

$$P(E_6) = \frac{6!}{6!0!}\,\frac{6}{45}\,\frac{5}{44}\,\frac{4}{43}\,\frac{3}{42}\,\frac{2}{41}\,\frac{1}{40} = \frac{1}{8145060} \qquad 0{,}00001$$

$$P(E_5) = \frac{6!}{5!1!}\,\frac{6}{45}\,\frac{5}{44}\,\frac{4}{43}\,\frac{3}{42}\,\frac{2}{41}\,\frac{38}{40} = \frac{228}{8145060} \qquad 0{,}00001$$

$$P(E_4) = \frac{6!}{4!2!}\,\frac{6}{45}\,\frac{5}{44}\,\frac{4}{43}\,\frac{3}{42}\,\frac{39}{41}\,\frac{38}{40} = \frac{11115}{8145060} \qquad 0{,}14$$

$$P(E_3) = \frac{6!}{3!3!}\,\frac{6}{45}\,\frac{5}{44}\,\frac{4}{43}\,\frac{39}{42}\,\frac{38}{41}\,\frac{37}{40} = \frac{182780}{8145060} \qquad 2{,}24$$

$$P(E_2) = \frac{6!}{2!4!}\,\frac{6}{45}\,\frac{5}{44}\,\frac{39}{43}\,\frac{38}{42}\,\frac{37}{41}\,\frac{36}{40} = \frac{1233765}{8145060} \qquad 15{,}15$$

$$P(E_1) = \frac{6!}{1!5!}\,\frac{6}{45}\,\frac{39}{44}\,\frac{38}{43}\,\frac{37}{42}\,\frac{36}{41}\,\frac{35}{40} = \frac{3454542}{8145060} \qquad 42{,}42$$

$$P(E_0) = \frac{6!}{0!6!}\,\frac{39}{45}\,\frac{38}{44}\,\frac{37}{43}\,\frac{36}{42}\,\frac{35}{41}\,\frac{34}{40} = \frac{3262623}{8145060} \qquad 40{,}06$$

Schließlich noch der Fünfer mit Zusatzzahl:

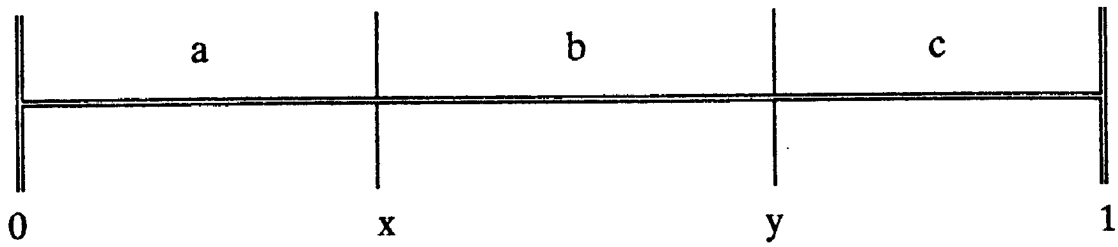
$$P(E_{5+Z}) = P(E_5)\cdot\frac{1}{38} = \frac{6}{8145060} \qquad 0{,}00007\%$$

<u>Programmhinweise:</u> Die relativen Häufigkeiten mit der die einzelnen Zahlen gezogen wurden und die absoluten und relativen Häufigkeiten der Anzahl richtiger Tips werden ausgegeben. Die "Sollwerte" sind im Histogramm gekennzeichnet.

Stabbrechen

Ein Glasstab fällt zu Boden und zerbricht in 3 Stücke. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß sich aus diesen 3 Stücken ein Dreieck bilden läßt?

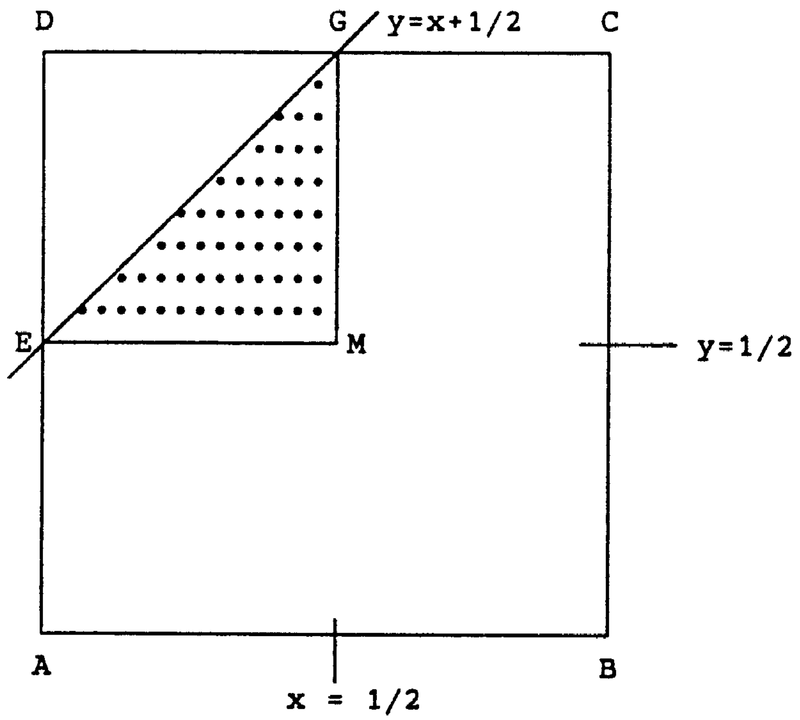
Zerbricht der Stab von der Länge 1 E in 3 Teile, so bezeichnen wir die Bruchstellen mit x und y ($x<y$) und erhalten folgende möglichen Dreiecksseiten: $a = x$, $b = y - x$, $c = 1 - y$.



Damit ein Dreieck vorliegt, muß die Summe je zweier Dreiecksseiten größer als die dritte sein (Dreiecksungleichungen):

1) $a + b > c$	2) $a + c > b$	3) $b + c > a$
$x+y-x > 1-y$	$x+1-y > y-x$	$y-x+1-y > x$
$y > \frac{1}{2}$	$y < x + \frac{1}{2}$	$x < \frac{1}{2}$

Diese 3 Ungleichungen legen ebensoviele Halbebenen im R_2 fest. Wir kennzeichnen innerhalb des Einheitsquadrats die Menge der gemeinsamen Punkte der 3 Halbebenen.



Die zufällig generierten Werte x und y sind nun Punkte der Ebene, wobei für den Fall x>y x und y vertauscht werden, was geometrisch gedeutet einer Spiegelung an der 1.Mediane entspricht. Jeder der möglichen Punkte liegt im recht-winkeligen Dreieck ACD, günstig sind aber nur jene, die sich im rechtwinkeligen Dreieck EMG befinden. Ein Vergleich der entsprechenden Flächeninhalte liefert die gesuchte Wahrscheinlichkeit.

$$P(E) = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} = 0{,}25, \quad \textit{also}\ 25\%$$

<u>Programmhinweis:</u> Die Simulation ("D" ... Dreieck, "-" ... kein Dreieck) wird n-mal durchgeführt.

Das Galton - Brett (nach Francis Galton, 1822-1911)

Die Binomialverteilung läßt sich durch das Galton-Brett experimentell verifizieren. Aus einem Behälter fallen Kugeln auf Nägel, wobei sie jedesmal mit den Wahrscheinlichkeiten p nach rechts bzw. q = 1-p nach links abgelenkt werden. Jede Ablenkung einer Kugel durch einen Nagel stellt ein Bernoulli- Experiment mit den Wahrscheinlichkeiten p und q dar; das Durchlaufen von n Nagelreihen ist also als n-malige Durchführung eines Bernoulli-Experimentes aufzufassen. Wird die Kugel auf ihrem Weg k-mal nach rechts abgelenkt, so fällt sie am Ende in das k-te Fach.
Für p=q=½ handelt es sich es bei den zu erwartenden Füllhöhen um die Größenverhältnisse der Binomialkoeffizienten n über k, die man am Pascalschen Dreieck ablesen kann.

Einen Zufallsversuch mit zwei möglichen Ergebnissen heißt Bernoulli-Experiment (z.B.: Werfen einer Münze mit den Seiten 0 und 1). Bezeichnet man die Ergebnisse mit E (Erfolg) und E' (Fehlschlag), so sind die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten p=P(E) und q=P(E')=1-p.
Wird ein Bernoulli-Experiment nun n-mal durchgeführt, dann ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß das Ereignis E genau k-mal eintritt, gegeben durch

$$P(E=k) = b_n(k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

Da bei der Simulation 6 Nagelreihen verwendet werden, betrachten wir die Zeile 6 im Pascalschen Dreieck und tragen diese Werte in die zugehörigen Fächer ein:

1	6	15	20	15	6	1	Zeilensumme:64
0	1	2	3	4	5	6	Fachnummern

Dies bedeutet, daß bei $p=q=\frac{1}{2}$ und einer Anzahl von 64 Kugeln die obige Verteilung die "ideale" ist.

Programmhinweise: Neben der Anzahl der Kugeln ist die Wahrscheinlichkeit p für die Ablenkung der Kugeln im Bereich $0{,}1 \leq p \leq 0{,}9$ wählbar, um verschiedene Binomialverteilungen generieren zu können. Um bei einer hohen Kugelanzahl Zeitprobleme zu vermeiden, sollte als Verzögerung der Wert 0 gewählt werden (empfehlenswert ist die Durchführung der Simulation parallel zum Unterricht). Die Möglichkeit, das Fallen der Kugel zu verlangsamen ist für Erklärungen des Lehrers vorgesehen.
Während der Simulation wird man durch ein am Bildschirm angezeigtes Stabdiagramm über die aktuelle Verteilung der Kugeln auf die einzelnen Fächer informiert. Wird die Simulation unterbrochen, werden die absoluten und relativen Häufigkeiten (in%) ausgegeben.
Im 3D-Histogramm sind die "Sollwerte" gekennzeichnet.

Beispiel 1 zur Binomialverteilung (Tischtennis)

Zwei Spieler spielen Tischtennis, wobei die Gewinnchancen des besseren Spielers bei jedem Satz p Prozent betragen.
a) Es werden eine ungerade Anzahl von Sätzen gespielt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der schlechtere Spieler eine Mehrzahl der Sätze gewinnt ?
Wie viele Sätze sind nötig, damit der
b) bessere Spieler mit einer Wahrscheinlichkeit von b Prozent
c) schlechtere Spieler mit einer Wahrscheinlichkeit von s Prozent
mindestens einen davon gewinnt ?

Um die üblichen mathematischen Bezeichnungen beizubehalten, sind in den folgenden Ausführungen die Prozente durch ihre entsprechenden Wahrscheinlichkeiten ersetzt:

$$p \leftarrow \frac{p}{100},\ b \leftarrow \frac{b}{100},\ s \leftarrow \frac{s}{100}.$$

a) Der schlechtere Spieler ist erfolgreich, wenn der bessere Spieler von 2n+1 Sätzen höchstens n gewinnt. Die Wahrscheinlichkeit dafür beträgt

$$P(S \le n) = b_n(0) + b_n(1) + \ldots\ldots + b_n(n-1) + b_n(n) = \sum_{k=0}^{n} b_n(k)$$

Beispiel: p = 0,6, q = 0,4	
Anzahl der Sätze 2n+1	Wahrscheinlichkeit P(E) für den besseren Spieler, weniger als n Sätze zu gewinnen
1	$P(S\le 0) = 0{,}4000$
3	$P(S\le 1) = 0{,}3520$
5	$P(S\le 2) = 0{,}3174$
7	$P(S\le 3) = 0{,}2898$
9	$P(S\le 4) = 0{,}2666$
11	$P(S\le 5) = 0{,}2465$

Dieses Beispiel zeigt die starke Zufallsabhängigkeit sportlicher Entscheidungen. Betragen die Gewinnchancen des besseren Spielers 60%, so gewinnt der deutlich schlechtere bei

3 gespielten Sätzen in mehr als 35%

5 gespielten Sätzen in mehr als 31%

11 gespielten Sätzen noch in fast 25% aller Fälle!

b) E' ... der schlechtere Spieler gewinnt alle Sätze

$$Aus \quad 1 - q^n \geq b \quad folgt \quad n \geq \frac{\ln(1-b)}{\ln q}$$

Für p = 0,6 , q = 0,4 , b = 0,99 (99%) erhält man n ≥ 5,02...

c) E' ... der bessere Spieler gewinnt alle Sätze

$$Aus \quad 1 - p^n \geq s \quad folgt \quad n \geq \frac{\ln(1-s)}{\ln p}$$

Für p = 0,6 , q = 0,4 , s = 0,99 (99%) erhält man n ≥ 9,01...

Programmhinweis: Die entsprechenden Simulationen werden durchgeführt.

Beispiel 2 zur Binomialverteilung (Multiple-Choice-Test)

Ein Prüfungsbogen enthält n Fragen mit je k Antwortmöglichkeiten, von denen genau eine richtig ist (Multiple-Choice-Test). Die Prüfung gilt als bestanden, wenn mehr als die Hälfte der Fragen richtig beantwortet ist. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß jemand, der die Antworten auf gut Glück ankreuzt
a) genau die für das Bestehen der Prüfung erforderliche Anzahl von Fragen richtig hat?
b) die Prüfung besteht?

i ... Anzahl der für das Bestehen der Prüfung notwendigen richtigen Antworten.

$$p = \frac{1}{k}, \quad q = 1 - p$$

a) Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, daβ genau i Fragen richtig beantwortet werden.

$$P(E_a) = b_n(i) = \binom{n}{i} \cdot p^i \cdot q^{n-i}$$

b) Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, daβ mindestens i Fragen richtig beantwortet werden.

$$P(E_b) = b_n(i) + b_n(i+1) + \ldots\ldots + b_n(n-1) + b_n(n) = \sum_{k=i}^{n} b_n(k)$$

Die folgende Tabelle zeigt, daβ bereits bei 10 Fragen mit nur 3 Antwortmöglichkeiten die Chancen, durch zufälliges Ankreuzen zum Ziel zu kommen, sehr gering sind.

n	k	i	$P(E_a)$ in %	$P(E_b)$ in %
10	2	6	20,51	37,70
10	3	6	5,69	7,66
10	4	6	1,62	1,97
10	5	6	0,55	0,64
10	6	6	0,22	0,24
30	3	16	1,16	1,88

<u>Programmhinweis:</u> Die entsprechenden Simulationen werden durchgeführt.

Literatur

Arthur Engel: Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik, Band 1, Klett Studienbücher, Ernst Klett Verlag.

Lambacher-Schweizer: Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik, Themenhefte Mathematik, Ernst Klett Verlag.

H.C.Reichel-G.Hanisch-R.Müller: Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik (Mathematik für Schule und Praxis, Band 1), Hölder-Pichler-Tempsky Verlag.

Jeger-Ineichen: Kombinatorik, Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung, Orell Füssli Verlag.

W.Kirschenhofer-H.Arnold: Aufgabensammlung zur Wahrscheinlichkeitsrechnung mit didaktischen Beiträgen, Johannes Kepler Universität Linz.

Laub-Hruby-Reichel-Litschauer-Groß: Mathematiklehrbücher für AHS, Hölder-Pichler-Tempsky Verlag.

Szirucsek-Dinauer-Unfried-Schatzl: Mathematiklehrbücher für AHS, Ueberreuter, Hölder-Pichler-Tempsky Verlag.